Zum Beweis von Gl. (A. 17) macht man sich klar, daß die linke Seite ein Vektor ist, der drehinvariant (da ϑ den Winkel zwischen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}'$ bedeutet) von $\boldsymbol{v}$ abhängt. Es muß also gelten

$$\oint \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} v_i' d\Omega' = \gamma v_i . \qquad (A.20)$$

Um die Konstante γ zu bestimmen, multipliziert man skalar mit $\boldsymbol{v}$. Auf der linken Seite tritt dann die Größe $\sigma^{(1)}$ [Gl. (30)] auf und man erhält

$$\sigma^{(1)} = \gamma . \qquad (A.21)$$

Um Gl. (A. 18) zu beweisen, beachtet man, daß die linke Seite einen Tensor zweiter Stufe darstellt, der drehinvariant von $\boldsymbol{v}$ abhängt und invariant gegen Vertauschung der Indizes i und j ist. Deshalb wird gesetzt

$$\oint \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} v_i' v_j' d\Omega' = \delta v_i v_j + \varepsilon v^2 \delta_{ij} . \qquad (A.22)$$

Man bildet jetzt einerseits die Spur und findet

$$\sigma = \delta + 3 \varepsilon . \qquad (A.23)$$

Andererseits multipliziert man mit $v_i v_j$ und summiert. Links tritt dann die Größe $\sigma^{(2)}$ [Gl. (36)] auf

$$\sigma^{(2)} = \delta + \varepsilon . \qquad (A.24)$$

Aus den Gln. (A. 23) und (A. 24) kann man die Konstanten δ und ε bestimmen und in Gl. (A. 22) einsetzen. Ebenso beweist man Gl. (A. 19) mit

$$\sigma^{(3)} = \oint \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \cos^3 \vartheta \, d\Omega . \qquad (A.25)$$

Die Methode der Korrelationsfunktion in der Theorie der Supraleitung

III. Ableitung der Boltzmann-Gleichung

Gerhart Lüders

Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen

(Z. Naturforschg. **21 a**, 1425—1436 [1966]; eingegangen am 3. Juni 1966)

The Boltzmann equation, which was conjectured and applied in previous papers of this series, is derived from an integral equation given by Edwards, Abrikosov, and Gorkov. In an appendix, we present the quasi-classical approximation for the calculation of Green functions.

Die Sprungtemperatur T_c eines Supraleiters und der Verlauf der Lückenfunktion $\Delta(\boldsymbol{r})$ lassen sich bei einem Übergang zweiter Ordnung aus einer linearen Integralgleichung

$$\Delta(\boldsymbol{r}) = g T_c \int d^3\boldsymbol{r}' \sum_{\omega} K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \, \Delta(\boldsymbol{r}') \qquad (1)$$

bestimmen. Hierbei ist g die Kopplungskonstante der BCS-Theorie und ω durchläuft alle positiven und negativen ungeradzahligen Vielfachen von πT_c. Nach de Gennes [1] kann $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ als Laplace-Transformierte einer Korrelationsfunktion geschrieben werden, wenn das physikalische System invariant gegen Zeitumkehr ist. In der ersten Arbeit dieser Reihe [2] wurde diese Beziehung kritisch diskutiert. Es ergab sich dabei, daß $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ genauer aus dem (zunächst nicht präzis definierten) langsam veränderlichen Anteil der Korrelationsfunktion zu berechnen ist. Es konnte weiter gezeigt werden, daß im homogenen reinen Leiter (d. h. für freie Elektronen) genau die klassisch auf der mikrokanonischen Gesamtheit berechnete Korrelationsfunktion einzusetzen ist. Es wurde schließlich die Vermutung ausgesprochen, daß in allen Fällen die klassische Korrelationsfunktion zu verwenden ist; aber ein Beweis konnte damals nicht gegeben werden.

In I wurde ferner gezeigt, daß sich die dort genau erklärte klassische Korrelationsfunktion als Impulsraum-Integral über eine Verteilungsfunktion im Phasenraum schreiben läßt, die sich aus einem gegebenen Anfangszustand nach den Gesetzen der klassischen Mechanik entwickelt. Sind Fremdatome in dem Leiter statistisch unabhängig verteilt, so gehorcht diese Verteilungsfunktion offenbar der Boltzmann-Gleichung [Gl. (I. 49)]. Statt zu beweisen, daß

[1] P. G. de Gennes, Rev. Mod. Phys. **36**, 225 [1964].

[2] G. Lüders, Z. Naturforschg. **21 a**, 680 [1966]. Diese Arbeit, die sich im Titel nicht als erste der Reihe zu erkennen gibt, soll im folgenden als I zitiert werden. Gleichungen aus dieser Arbeit werden entsprechend als Gl. (I. 49) usw. angegeben.

sich $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ als LAPLACE-Integral über die klassische Verteilungsfunktion berechnet, kann man auch direkt die BOLTZMANN-Gleichung ableiten. Das wird in der vorliegenden Arbeit gemacht.

Von der Beschränkung auf Invarianz gegen Zeitumkehr wurde in der zweiten Arbeit dieser Reihe [3] abgegangen. Dort wurden Elektronen im Magnetfeld behandelt. Es wurde eine Erweiterung der BOLTZMANN-Gleichung geraten, bei der die räumliche Differentiation durch eichinvariante Differentiation (mit der Ladung $-2e$) ersetzt wird; im Anhang wurde damals eine Rechtfertigung dieser Ersetzung versucht, aber ein strenger Beweis wurde nicht gegeben. Es konnte in II gezeigt werden, daß sich aus der so abgeänderten BOLTZMANN-Gleichung eine Reihe von aus der Literatur bekannten Gleichungen für $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ bzw. $\Delta(\boldsymbol{r})$ gewinnen lassen. Die Rechnungen waren kürzer und durchsichtiger als die bisherigen Ableitungen auf der Grundlage der Arbeiten von EDWARDS, ABRIKOSOV und GORKOV [4]; sie hatten aber den Nachteil, daß die Ausgangsgleichungen nicht bewiesen worden waren. Der Beweis wird in der jetzigen Arbeit nachgeholt.

Für unendlich ausgedehnte homogene saubere Leiter ist eigentlich nichts mehr zu beweisen, nachdem dieser Fall bereits in I vollständig untersucht wurde. Er wird noch einmal behandelt (Abschn. 1), weil die zugehörige Verteilungsfunktion später bei der Untersuchung des Leiters mit Zusätzen (Abschn. 2) eine Rolle spielt. Außerdem wird die Verteilungsfunktion benötigt für den sauberen Leiter im Magnetfeld (Abschn. 3). Das Magnetfeld wird hier und für Leiter mit Zusätzen im Sinne einer quasiklassischen Näherung eingeführt. Es zeigt sich, daß man einfache Aussagen nur erhält, wenn die klassische Elektronenbahn auf einer gewissen „Kohärenzlänge" [ξ_ω bzw. ζ_ω, definiert durch die Gln. (6) bzw. (15)] durch das Magnetfeld praktisch noch nicht gekrümmt wird. Die Untersuchungen werden nicht auf unendlich ausgedehnte homogene Leiter beschränkt, sondern mittels quasiklassischer Näherung auf andere Fälle ausgedehnt (Abschn. 4). Im Anhang wird die quasiklassische Näherung für GREENsche Funktionen allgemein dargestellt.

Wesentlich interessanter als saubere Leiter sind Leiter mit Zusätzen. Das Verhalten von Elektronen in derartigen Leitern wird quantenmechanisch durch die EAG-Theorie beschrieben. Wir leiten die BOLTZMANN-Gleichung aus einer Integralgleichung von EAG her (Abschn. 3); beide Formulierungen erweisen sich als gleichwertig.

Deswegen sollte man sich an dieser Stelle die Voraussetzungen der EAG-Theorie in Erinnerung rufen. Erstens muß $|\omega|$ genügend klein sein und die freie Weglänge der Elektronen darf nicht zu kurz sein [genauer in Gl. (21)], obwohl bei der praktischen Auswertung der Summe in Gl. (1) an vielen Stellen von $-\infty$ bis $+\infty$ summiert wird. Man kann zwar hoffen, daß Fehler bei größeren $|\omega|$ die Resultate wenig beeinflussen, aber neue Gesichtspunkte kann der Verf. zu dieser Frage nicht beitragen. Übrigens muß für die Gültigkeit der Methode der Korrelationsfunktion bereits bei sauberen Leitern genügend kleines $|\omega|$ vorausgesetzt werden [Gln. (5) und (6)].

Die zweite Beschränkung der EAG-Theorie besteht darin, daß die Wechselwirkung zwischen einem Elektron und einem einzelnen Fremdatom nur in zweiter Ordnung der Störungsrechnung berücksichtigt wird; die erste Ordnung kompensiert sich gegen eine Renormierung des chemischen Potentials, während höhere Ordnungen fortgelassen werden. EDWARDS (vgl. Fußn. [4]) teilt hierzu Überlegungen mit, die nicht wiederholt werden sollen. In der vorliegenden Arbeit wird ebenso wie bei EAG für den differentiellen Streuquerschnitt die zweite BORNsche Näherung verwendet, aber angenommen, daß die so gewonnenen Formeln allgemeiner gelten.

DE GENNES' Hinweis auf den Zusammenhang von $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ mit einer Korrelationsfunktion in Systemen, die invariant gegen Zeitumkehr sind, bildete den Ausgangspunkt der Untersuchungen; er führte auf heuristischem Wege dazu, $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ durch eine Verteilungsfunktion auszudrücken, die der BOLTZMANN-Gleichung gehorcht. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zeigen aber, daß die Beschränkung auf Invarianz gegen Zeitumkehr tatsächlich unnötig ist. Es ist nicht nur ohne weiteres möglich, die Überlegungen auf Elektronen im magnetischen Feld auszudehnen

[3] G. LÜDERS, Z. Naturforschg. **21 a**, 1415 [1966], im folgenden als II zitiert.

[4] S. F. EDWARDS, Phil. Mag. **3**, 1020 [1958]; Herrn KEITER danke ich für den Nachweis dieser Arbeit. — A. A. ABRIKOSOV u. L. P. GORKOV, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. **35**, 1558 [1958], engl. Übers. Soviet Phys.-JETP **8**, 1090 [1959]. Diese offenbar unabhängig voneinander entstandenen Arbeiten werden im folgenden mit EAG zitiert. Die Arbeit von EDWARDS handelt nicht von Supraleitung, sondern von der elektrischen Leitfähigkeit; auch die Arbeit von ABRIKOSOV und GORKOV beschäftigt sich zum Teil mit der Berechnung der Leitfähigkeit. Die Ergebnisse der jetzigen Arbeit dürften auch ein Licht auf den Zusammenhang zwischen der Leitfähigkeitsberechnung nach EAG und mittels der BOLTZMANN-Gleichung werfen.

(jedenfalls wenn die magnetische Bahnkrümmung vernachlässigt werden darf); es bereitet auch keine Schwierigkeit, paramagnetische Zusätze nach der gleichen Methode zu berücksichtigen. Hierauf soll in einer weiteren Arbeit eingegangen werden, in der u. a. die Diffusionsnäherung auf Leiter mit paramagnetischen Zusätzen ausgedehnt wird. Allerdings verliert die BOLTZMANN-Gleichung ihre unmittelbare physikalisch anschauliche Bedeutung, wenn keine Invarianz gegen Zeitumkehr besteht; was sich nach der BOLTZMANN-Gleichung ausbreitet, sind dann nicht mehr Elektronen, sondern eher interferenzfähige Informationsträger. Die Kennzeichnung des Verfahrens als einer Methode der Korrelationsfunktion erweist sich dann nicht mehr als ganz sachgemäß.

Daß überhaupt eine klassisch-mechanische Behandlung des Problems der Sprungtemperatur möglich ist, liegt an der (wenigstens im vereinfachten Modell) punktförmigen Elektron-Elektron-Wechselwirkung. Erst sie führt zu einer Beziehung von der Form der Gl. (1) mit

$$K_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\, G^*_\omega(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\,; \tag{2}$$

von der etwa notwendigen Mittelung über die Lage von Fremdatomen ist dabei abgesehen. Die GREENsche Funktion $G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ ist im wesentlichen eine quantenmechanische Amplitude für die Ausbreitung eines Elektrons von $\boldsymbol{r}'$ nach $\boldsymbol{r}$, die Funktion $K_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ also etwa eine Amplitude für die Ausbreitung eines Paares. Bei Invarianz gegen Zeitumkehr gilt

$$G_\omega(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) = G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,; \tag{3}$$

damit wird die Ausbreitungsamplitude des Paares zur Wahrscheinlichkeit für die Ausbreitung eines einzelnen Elektrons. Daß diese Wahrscheinlichkeit klassisch berechnet werden darf, ist damit natürlich nicht bewiesen. Auch wenn die Invarianz gegen Zeitumkehr [Gl. (3)] nicht gilt, bleibt $K_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ ein Produkt von zwei Ausbreitungsamplituden einzelner Teilchen; in manchen Fällen ist auch dann noch eine Art klassischer Berechnung möglich.

1. Unendlich ausgedehnter homogener sauberer Leiter

Im homogenen sauberen Leiter ist die GREENsche Funktion $G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ erklärt als Lösung der Gleichung

$$\left(i\,\omega + \frac{1}{2\,m}\,\Delta + \mu\right) G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{4}$$

($\hbar = 1$). Hierbei bedeutet ω einen reellen Parameter, m die Elektronenmasse und μ das chemische Potential (FERMI-Energie). Im unendlich ausgedehnten Leiter kann Gl. (4) sofort gelöst werden. Gilt insbesondere

$$|\,\omega\,| \ll \mu = m\,v^2/2 \tag{5}$$

(v = FERMI-Geschwindigkeit) oder

$$\xi_\omega = v/2\,|\,\omega\,| \gg (m\,v)^{-1}\,, \tag{6}$$

so lautet die Lösung

$$G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{m}{2\,\pi\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \cdot \exp\{(i\,m\,v\,\operatorname{sign}\omega - |\omega\,|/v)\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|\}\,. \tag{7}$$

Es soll gezeigt werden, daß die Funktion $K_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ [Gl. (2)] in der Form

$$K_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = m^2\,v \oint g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\Omega \tag{8}$$

($|\,\boldsymbol{v}\,| = v$; Integration über alle Richtungen von $\boldsymbol{v}$) geschrieben werden kann, wobei die Verteilungsfunktion $g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ der Differentialgleichung (LAPLACE-Transformierte einer BOLTZMANN-Gleichung ohne Streuterm)

$$(2\,|\,\omega\,| + \boldsymbol{v}\cdot\partial)\; g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') = (2\,\pi)^{-2}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{9}$$

gehorcht. Hier steht ∂ für den Gradienten $\partial/\partial\boldsymbol{r}$. Gl. (8) unterscheidet sich von entsprechenden Formeln in den vorangehenden Arbeiten dadurch, daß die Termdichte explizit durch m und v ausgedrückt wurde.

Auf Grund von I ist $g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ bekannt

$$g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') = (2\,\pi)^{-2} \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \exp\{-2\,|\,\omega\,|\,t\}\;\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{v}\,t) \tag{10}$$

$$= \frac{1}{(2\,\pi\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|)^2\,v}\exp\{-2\,|\,\omega\,|\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|/v\}\,\hat{\delta}\left(\hat{\boldsymbol{v}},\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)$$

mit $\hat{\delta}(\ldots,\ldots)$ als δ-Funktion auf der Einheitskugel und $\hat{\boldsymbol{v}}$ als Einheitsvektor in Richtung $\boldsymbol{v}$. Der zweite Ausdruck für $g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ (hinter dem zweiten Gleichheitszeichen) folgt aus dem ersten wegen

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{v}\,t) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|^2\,v}\,\delta(t-|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|/v)\;\hat{\delta}\left(\hat{\boldsymbol{v}},\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) \qquad (t>0)\,. \tag{11}$$

Gl. (8) bestätigt man jetzt sofort mittels des zweiten Ausdrucks für $g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ [Gl. (10)], während Gl. (9) aus dem ersten Ausdruck folgt. Man hat nur zu beachten

$$\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{v}\,t) = 0\,, \tag{12}$$

d. h. $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{v}\,t)$ ist als Funktion der Variablen $\boldsymbol{r}$ und t eine Verteilungsfunktion im Phasenraum, die sich nach den Gesetzen der Mechanik zeitlich entwickelt. Mittels partieller Integration ergibt sich aus Gl. (12) für die LAPLACE-Transformierte

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\int_0^\infty \mathrm{d}t \exp(-2\,|\omega|\,t)\;\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{v}\,t) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - 2\,|\omega|\int_0^\infty \mathrm{d}t \exp(-2\,|\omega|\,t)\;\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{v}\,t)\,. \tag{13}$$

Man erkennt, daß $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ von dem Vorzeichen des Parameters ω unabhängig ist. Das gilt ganz allgemein; vgl. Gln. (I. 8) und (II. A. 2). Zur Vereinfachung soll im folgenden stets $\omega > 0$ angenommen werden, ohne daß dies an den Indizes deutlich gemacht wird.

2. Unendlich ausgedehnter homogener Leiter mit Zusätzen

In einem homogenen Leiter mögen sich Fremdatome an den Orten $\boldsymbol{r}_j$ befinden. Zwischen einem Elektron am Ort $\boldsymbol{r}$ und dem Fremdatom bestehe eine Wechselwirkung mit dem kugelsymmetrischen Potential $v(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)$. Die Reichweite a der Wechselwirkung soll kurz sein; genauer soll gefordert werden

$$a \ll \zeta_\omega \tag{14}$$

mit

$$1/\zeta_\omega = 1/\xi_\omega + 1/l\,, \tag{15}$$

wobei ξ_ω durch Gl. (6) gegeben ist und

$$l = (n\,\sigma)^{-1} \tag{16}$$

die freie Weglänge der Elektronen bedeutet. In Gl. (16) ist n die Zahl der Fremdatome pro Volumen und σ der integrierte Streuquerschnitt. Mit

$$v(\boldsymbol{r}) = (2\,\pi)^{-3}\int v(\boldsymbol{k})\exp(i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{17}$$

berechnet sich der differentielle Streuquerschnitt in BORNscher Näherung zu

$$\mathrm{d}\sigma(\vartheta)/\mathrm{d}\Omega = (m/2\,\pi)^2\,|v(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')|^2 \tag{18}$$

und hieraus durch Integration über alle Richtungen der Streuquerschnitt σ [Gl. (16)]. Im weiteren interessiert nur die Streuung von Elektronen mit FERMI-Geschwindigkeit ($|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'| = m\,v$); ϑ bedeutet den Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{k}'$. Wir benötigen noch die Funktion

$$w(\boldsymbol{r}) = \int v(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,v(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' = (2\,\pi)^{-3}\int |v(\boldsymbol{k})|^2\exp(i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,, \tag{19}$$

die ebenfalls eine Reichweite der Größenordnung a besitzt. Sie tritt auf, wenn über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Orte der Fremdatome gemittelt wird.

Statt Gl. (4) gilt jetzt

$$\left(i\,\omega + \frac{1}{2\,m}\Delta + \mu - \sum_j v(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)\right)G_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,. \tag{20}$$

Dabei interessiert aber nicht eine bestimmte Verteilung der Orte $\boldsymbol{r}_j$; vielmehr ist in allen Resultaten über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der (als statistisch unabhängig angenommenen) $\boldsymbol{r}_j$ zu ermitteln. Unter der Voraussetzung genügend kleinen $|\omega|$ und nicht zu kurzer freier Weglänge, d. h. für

$$\zeta_\omega \gg (m\,v)^{-1}\,, \tag{21}$$

ergibt sich nach dieser Mittelung im unendlich ausgedehnten Leiter (vgl. EAG)

$$\overline{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{m}{2\,\pi\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp\{(i\,m\,v\,\mathrm{sign}\,\omega - |\omega|/v - n\,\sigma/2)\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\}\,. \tag{22}$$

Gl. (22) geht formal aus Gl. (7) durch die Ersetzung $2\,|\omega| \to 2\,|\omega| + n\,v\,\sigma$ hervor. Also gilt entsprechend Gl. (8)

$$\overline{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\overline{G}{}^*_\omega(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) = m^2\,v\oint g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\Omega \tag{23}$$

mit [vgl. Gl. (10)]

$$g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = (2\pi)^{-2} \int_0^\infty \mathrm{d}t \exp\{-(2|\omega| + n v \sigma) t\} \, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{v} t)$$

$$= \frac{1}{(2\pi |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)^2 v} \exp\{-(2|\omega|/v + n\sigma) |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|\} \, \hat{\delta}\left(\hat{\boldsymbol{v}}, \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) \tag{24}$$

und [vgl. Gl. (9)]

$$(2|\omega| + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial} + n v \sigma) \, g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = (2\pi)^{-2} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{25}$$

Damit ist die gestellte Aufgabe aber noch nicht gelöst.

Wir untersuchen vielmehr jetzt die Funktion

$$K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') = \langle G_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \, G_\omega^*(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') \rangle . \tag{26}$$

Die spitze Klammer bedeutet Mittelung über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der $\boldsymbol{r}_j$. Die eigentlich interessierende Funktion $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ ergibt sich daraus folgendermaßen

$$K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}). \tag{27}$$

Nach EAG gehorcht $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'')$ der Integralgleichung

$$K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') = \overline{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \, \overline{G}_\omega^*(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') + n \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{s} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{s}'' \, \overline{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) \, w(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}'') \, K_\omega(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{s}'') \, \overline{G}_\omega^*(\boldsymbol{s}'', \boldsymbol{r}''). \tag{28}$$

Es soll gezeigt werden, daß $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ auch jetzt gemäß Gl. (8) als Integral über eine Verteilungsfunktion $g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ geschrieben werden kann, wobei aus Gl. (28) die BOLTZMANN-Gleichung

$$(2|\omega| + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial} + n v \sigma) \, g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') - n v \oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega} \, g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'; \boldsymbol{r}') \, \mathrm{d}\Omega' = (2\pi)^{-2} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{29}$$

folgt. Genauer wird sich zeigen, daß der Hinaus-Streuterm (prop. $n v \sigma$) aus dem ersten Summanden der rechten Seite von Gl. (28) folgt und der Herein-Streuterm (Integral über $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$) aus dem zweiten Summanden, der seinerseits mit der sog. Vertex-Korrektur zusammenhängt.

Im Sinne der Erörterungen am Schluß von Abschn. 1 wählen wir $\omega > 0$. Für genügend kleine $|\boldsymbol{r}'' - \boldsymbol{r}|$ und $|\boldsymbol{s}'' - \boldsymbol{s}|$ und nicht zu kleines $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}|$ (Diskussion am Schluß dieses Abschnitts) folgt dann aus Gl. (22) zunächst

$$\overline{G}_\omega^*(\boldsymbol{s}'', \boldsymbol{r}'') = \exp\left\{ i m v \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'' + \boldsymbol{s}'' - \boldsymbol{s}) \right\} \, \overline{G}_\omega^*(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r}) \tag{30}$$

[vgl. auch Gl. (21)] und wegen der Gln. (23) und (24)

$$\overline{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) \, \overline{G}_\omega^*(\boldsymbol{s}'', \boldsymbol{r}'') = m^2 v \oint \mathrm{d}\Omega \exp\{ i m \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'' + \boldsymbol{s}'' - \boldsymbol{s}) \} \, g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{s}). \tag{31}$$

Setzt man dies in Gl. (28) ein, so läßt sich zunächst schreiben

$$K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') = m^2 v \oint \mathrm{d}\Omega \exp\{ i m \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'') \} \, g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') \equiv \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \exp\{ i \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'') \} \, \delta(\eta_k) \, g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') \tag{32}$$

$(\boldsymbol{k} = m \boldsymbol{v})$, wobei

$$\eta_k = k^2/(2m) - \mu \tag{33}$$

gilt. Da aus Gl. (32) für $\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}$ insbesondere Gl. (8) folgt, kann $g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ als die gesuchte Verteilungsfunktion angesehen werden. Für sie gilt

$$g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') + n \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{s} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{s}'' \, g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{s}) \exp\{ i m \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{s}'' - \boldsymbol{s}) \} \, w(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}'') \, K_\omega(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{s}''). \tag{34}$$

Setzt man im Integral auf der rechten Seite noch die Gln. (19) und (32) ein und beachtet Gl. (18), so folgt zunächst

$$g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') + (2\pi)^2 n v \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{s} \, g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{s}) \oint \mathrm{d}\Omega' \, \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega} \, g_\omega(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{v}'; \boldsymbol{r}') \tag{35}$$

mit ϑ als Winkel zwischen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}'$. Das ist im wesentlichen bereits die gesuchte BOLTZMANN-Gleichung (29), die damit auf die Integralgleichung (28) von EAG zurückgeführt ist. Man hat nur noch den Operator $(2|\omega| + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial} + n v \sigma)$ anzuwenden und Gl. (25) zu beachten.

Die Gültigkeit dieser Ableitung ist dadurch eingeschränkt, daß Gl. (30) nur näherungsweise gilt. Es müssen nämlich $|\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}|$ und $|\boldsymbol{s}''-\boldsymbol{s}|$ klein sein gegen $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|$, während letzteres groß zu sein hat gegen $(m\,v)^{-1}$. Die Abstände $|\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}|$ und $|\boldsymbol{s}''-\boldsymbol{s}|$ kommen in der Rechnung vor bis hinauf zur Reichweite a der Wechselwirkung. Da andererseits $\overline{G_\omega}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})\,\overline{G_\omega}^*(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})$ abklingt auf einer Strecke von der Größenordnung ζ_ω, und in Gl. (28) über alle $\boldsymbol{s}$ integriert wird, dürfte der Fehler unter Voraussetzung der Gln. (14) und (21) klein sein.

3. Unendlich ausgedehnter homogener Leiter im Magnetfeld

In Gegenwart eines magnetischen Feldes $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ mit dem Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ lautet die Gleichung für die Greensche Funktion des sauberen Leiters

$$\left(i\,\omega+\frac{1}{2\,m}(\partial+i\,e\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))^2+\mu\right)G_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{36}$$

(Gausssche Einheiten, $c=1$). Sie wird in quasiklassischer Näherung gelöst durch

$$G_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\exp\Big(-i\,e\int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t}\Big)\,G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), \tag{37}$$

wobei $G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ durch Gl. (7) gegeben ist. Die Integration im Exponenten erfolgt entlang der geradlinigen Verbindung der Punkte $\boldsymbol{r}'$ und $\boldsymbol{r}$. Gl. (37) stellt eine gute Näherung dar, wenn die klassische Elektronenbahn zwischen $\boldsymbol{r}'$ und $\boldsymbol{r}$ praktisch nicht durch das Magnetfeld gekrümmt wird. Da $G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ etwa auf der Strecke ξ_ω [Gl. (6)] abfällt, bedeutet das

$$m\,v/e\,H\gg\xi_\omega\,. \tag{38}$$

Damit die quasiklassische Näherung Gl. (37) brauchbar ist, darf sich außerdem das Magnetfeld längs der Elektronenbahn nicht zu schnell ändern; diese Voraussetzung ist praktisch stets erfüllt. Gl. (37) ist wohlbekannt; im Anhang über die quasiklassische Näherung wird sie noch einmal abgeleitet.

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\quad\text{mit}\quad\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\times\int_0^1\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}'+\lambda(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'))\,\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,. \tag{39, 40}$$

Hieraus folgt sofort

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0\,. \tag{41}$$

Für ein homogenes (oder näherungsweise homogenes) Magnetfeld mit $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\lesssim 2\,\xi_\omega$ ergibt sich unter Benutzung von Gl. (38) ferner die Abschätzung

$$e\,|\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|\lesssim e\,H\,\xi_\omega\ll m\,v\,. \tag{42}$$

Aus den Gln. (37) und (8) folgt jetzt

$$K_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,G^*_{\omega A}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})=m^2\,v\oint g_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\Omega \tag{43}$$

mit

$$g_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')=\exp\Big(-2\,i\,e\int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t}\Big)\,g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') \tag{44}$$

und $g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ nach Gl. (10). Mit dem eichinvarianten Differentialoperator

$$\tilde{\partial}=\partial+2\,i\,e\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{45}$$

gewinnt man aus den Gln. (44), (39) und (9) zunächst

$$(2\,|\omega|+\boldsymbol{v}\cdot\tilde{\partial}+2\,i\,e\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'))\,g_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')=(2\,\pi)^{-2}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,. \tag{46}$$

Wegen der Gln. (10) und (41) gilt dann aber sogar

$$(2\,|\omega|+\boldsymbol{v}\cdot\tilde{\partial})\,g_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')=(2\,\pi)^{-2}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{47}$$

als Differentialgleichung für $g_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ im reinen Leiter.

Auch für Leiter mit Zusätzen bleibt Gl. (37) gültig; sie lautet jetzt

$$\overline{G}_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\exp\left(-2\,i\,e\int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t}\right)\overline{G}_{\omega}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{48}$$

mit $\overline{G}_{\omega}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ nach Gl. (22). Die Abschätzung Gl. (38) ist zu ersetzen durch

$$m\,v/e\,H \gg \zeta_{\omega}\,. \tag{49}$$

Im schmutzigen Grenzfall ($\zeta_{\omega}\cong l$) erlaubt sie besonders hohe Magnetfelder. Gl. (23) bleibt gültig, wenn überall ein unterer Index $\boldsymbol{A}$ hinzugefügt wird. Es gilt

$$g_{\omega A}^{(\sigma)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')=\exp\left(-2\,i\,e\int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t}\right)g_{\omega}^{(\sigma)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') \tag{50}$$

mit $g_{\omega}^{(\sigma)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ nach Gl. (24). An die Stelle von Gl. (25) tritt

$$(2\,|\omega|+\boldsymbol{v}\cdot\tilde{\partial}+n\,v\,\sigma)\;g_{\omega A}^{(\sigma)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')=(2\,\pi)^{-2}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{51}$$

mit $\tilde{\partial}$ nach Gl. (45). Die Schlußweise ist dieselbe wie bei der Ableitung von Gl. (47).

Statt Gl. (30) gilt jetzt

$$\begin{aligned}\overline{G}^{*}_{\omega A}(\boldsymbol{s}'',\boldsymbol{r}'')=\exp\Big\{&i\,m\,v\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''+\boldsymbol{s}''-\boldsymbol{s})+i\,e\,(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}))\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')\\&+i\,e\,(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}))\cdot(\boldsymbol{s}''-\boldsymbol{s})\Big\}\,\overline{G}^{*}_{\omega A}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}).\end{aligned} \tag{52}$$

Dabei dürfen aber $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ und $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})$ wegen der Abschätzung Gl. (42), die bis auf die Ersetzung von ξ_{ω} durch ζ_{ω} auch jetzt gilt, fortgelassen werden. Gl. (32) ist daher zu ersetzen durch

$$\begin{aligned}K_{\omega}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')&=m^2\,v\oint\mathrm{d}\Omega\,\exp\{i(m\,\boldsymbol{v}+e\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')\}\,g_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')\\&\equiv\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\exp\{i(\boldsymbol{k}+e\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')\}\,\delta(\eta_k)\,g_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')\end{aligned} \tag{53}$$

und Gl. (34) durch

$$\begin{aligned}g_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')=g_{\omega A}^{(\sigma)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')+n\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{s}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{s}''\,g_{\omega A}^{(\sigma)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{s})\\\cdot\exp\{i(m\,\boldsymbol{v}+e\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}))\cdot(\boldsymbol{s}''-\boldsymbol{s})\}\,w(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'')\,K_{\omega}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{s}'').\end{aligned} \tag{54}$$

Gl. (35) bleibt gültig, wenn an allen Verteilungsfunktionen ein unterer Index $\boldsymbol{A}$ hinzugefügt wird. Damit folgt schließlich

$$(2\,|\omega|+\boldsymbol{v}\cdot\tilde{\partial}+n\,v\,\sigma)\;g_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')-n\,v\oint\frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\,g_{\omega A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}';\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\Omega'=(2\,\pi)^{-2}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{55}$$

4. Quasiklasische Näherung

Die Methode der Korrelationsfunktion ist nicht auf unendlich ausgedehnte homogene Leiter beschränkt. Es empfiehlt sich, für den allgemeinen Fall die quasiklassische Näherung heranzuziehen, die im Anhang dargestellt ist. Nach den Gln. (A. 5), (A. 2) und (A. 12) gilt im sauberen Leiter ohne Magnetfeld

$$G_{\omega}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{m}{2\,\pi}\sqrt{\frac{v(\boldsymbol{r})}{v(\boldsymbol{r}')\,h(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}}\,\exp\left\{\int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}}(i\,m\,v(s)\,\mathrm{sign}\,\omega-|\omega|/v(s))\,\mathrm{d}s\right\}. \tag{56}$$

Dabei bedeutet $v(\boldsymbol{r})$ die FERMI-Geschwindigkeit am Ort $\boldsymbol{r}$; es gilt

$$m\,v^2(\boldsymbol{r})/2+V(\boldsymbol{r})=\mu \tag{57}$$

mit $V(\boldsymbol{r})$ als potentieller Energie am gleichen Ort. Denkt man sich die klassische Bahn zwischen $\boldsymbol{r}'$ und $\boldsymbol{r}$ eingebettet in ein infinitesimales Bündel von Bahnen der gleichen Energie μ, die sämtlich durch $\boldsymbol{r}$ gehen und dort den räumlichen Winkel $\mathrm{d}\Omega$ erfüllen, und ist $\mathrm{d}q(\boldsymbol{r}')$ der Bündelquerschnitt am Ort $\boldsymbol{r}'$, so ist die Funktion $h(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$ in Gl. (56) definiert durch

$$h(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) = \mathrm{d}q(\boldsymbol{r}')/\mathrm{d}\Omega\,. \tag{58}$$

Das Integral im Exponenten ist längs der klassischen Bahn mit dem Bogenelement ds erstreckt; $v(s)$ bedeutet die FERMI-Geschwindigkeit am jeweiligen Bahnpunkt.

Zur GREENschen Funktion Gl. (56) gehört die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') &= (2\pi)^{-2} \int_0^\infty \mathrm{d}t \exp(-2\,|\omega|\,t)\, \delta[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, -t) - \boldsymbol{r}'] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2\, v(\boldsymbol{r}')\, h(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})} \exp\{-2\,|\omega|\, T(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\}\, \hat{\delta}[\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')]\,; \end{aligned} \tag{59}$$

vgl. Gl. (10). Die erste Gestalt (vor dem zweiten Gleichheitszeichen) rät man leicht nach I; die zweite geht aus der ersten hervor wegen

$$\delta[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, -t) - \boldsymbol{r}'] = \frac{1}{v(\boldsymbol{r}')\, h(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})}\, \delta[t - T(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')]\, \hat{\delta}[\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')]\,; \tag{60}$$

vgl. Gl. (11) und eine Bemerkung im Anschluß an Gl. (A. 23). Hier und in Gl. (59) bedeutet $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, -t)$ den Ort eines Elektrons zur Zeit $-t$, das zur Zeit 0 am Ort $\boldsymbol{r}$ die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ besitzt. $T(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ ist die Zeit, die ein Elektron der Energie μ braucht, um von $\boldsymbol{r}'$ nach $\boldsymbol{r}$ zu kommen, und $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ der Tangenten-Einheitsvektor (in Bewegungsrichtung weisend) an diese Bahn im Punkte $\boldsymbol{r}$. Man beweist

$$K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = G_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, G_\omega^*(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) = m^2\, v(\boldsymbol{r}) \oint g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}\Omega \tag{61}$$

wie in Abschn. 1 aus der zweiten Gestalt von $g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ in Gl. (59) und

$$\left(2\,|\omega| + \boldsymbol{v} \cdot \partial + \frac{1}{m}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\right) g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = (2\pi)^{-2}\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{62}$$

mit $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ als Kraft auf das Elektron aus der ersten Gestalt: $\delta[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; -t) - \boldsymbol{r}']$ ist eine Verteilungsfunktion im Phasenraum, die sich nach den Gesetzen der Mechanik zeitlich entwickelt.

Führen zwei Bahnen von $\boldsymbol{r}'$ nach $\boldsymbol{r}$, so ist auf der rechten Seite von Gl. (56) eine Summe zweier entsprechender Terme zu schreiben. $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ enthält dann zunächst vier Summanden, von denen aber zwei räumlich schnell oszillieren und fortgelassen werden dürfen, wenn gemäß Gl. (1) mit der i. a. langsam veränderlichen Funktion $\Delta(\boldsymbol{r}')$ multipliziert und über $\boldsymbol{r}'$ integriert wird. Es bleiben noch zwei Summanden, die je einer klassischen Bahn entsprechen. Zu jeder der beiden Bahnen gehört dann ein Beitrag zur Verteilungsfunktion. Die Gln. (61) und (62) bleiben gültig. Diese Überlegung dürfte nicht zutreffen, wenn es – etwa bei diffuser Reflexion an einer Oberfläche – unendlich viele benachbarte Bahnen gibt, die von $\boldsymbol{r}'$ nach $\boldsymbol{r}$ führen; hierbei berufen wir uns lieber auf korrespondenzmäßige Argumente (vgl. I).

In Gegenwart von (nicht notwendig homogen verteilten) Zusätzen gilt gemäß dem Anhang

$$\overline{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{m}{2\pi} \sqrt{\frac{v(\boldsymbol{r})}{v(\boldsymbol{r}')\, h(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})}} \cdot \exp\left\{\int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}} (i\, m\, v(s) \operatorname{sign} \omega - |\omega|/v(s) - n(s)\, \sigma(s)/2)\, \mathrm{d}s\right\}. \tag{63}$$

Statt der Gln. (23) bis (25) findet man jetzt

$$\overline{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, \overline{G}_\omega^*(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) = m^2\, v(\boldsymbol{r}) \oint g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}\Omega \tag{64}$$

mit
$$\begin{aligned} g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') &= (2\pi)^{-2} \int_0^\infty \mathrm{d}t \exp\left\{-2\,|\omega|\,t - \int_0^t n(t')\, v(t')\, \sigma(t')\, \mathrm{d}t'\right\} \delta[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, -t) - \boldsymbol{r}'] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2\, v(\boldsymbol{r}')\, h(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})} \exp\left\{-2\,|\omega|\, T(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}} n(s)\, \sigma(s)\, \mathrm{d}s\right\} \hat{\delta}[\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')] \end{aligned} \tag{65}$$

und daher
$$(2\,|\omega| + \boldsymbol{v} \cdot \partial + n(\boldsymbol{r})\, v(\boldsymbol{r})\, \sigma(\boldsymbol{r}))\, g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = (2\pi)^{-2}\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{66}$$

Beschränkt man sich wieder auf $\omega > 0$, so gilt statt Gl. (30)

$$\overline{G}_\omega^*(\boldsymbol{s}'', \boldsymbol{r}'') = \exp\{i\, m\, \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'') + i\, m\, \boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) \cdot (\boldsymbol{s}'' - \boldsymbol{s})\}\, \overline{G}_\omega^*(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r}) \tag{67}$$

mit $\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ $[\| \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})]$ als Endgeschwindigkeit (am Ort $\boldsymbol{r}$!) der Bahn von $\boldsymbol{s}$ nach $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ $[\| -\boldsymbol{e}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})]$ als der entsprechenden Anfangsgeschwindigkeit. Zum Beweis werden die Gln. (A. 2), (A. 3) und (A. 4) für $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$ verwendet. Setzt man Gl. (67) in Gl. (28) ein, so bleibt Gl. (32) gültig, während Gl. (34) zu ersetzen ist durch

$$g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') = g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') + \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{s}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{s}''\, g_\omega^{(\sigma)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{s}) \cdot \exp\{i\, m\, \boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})\cdot(\boldsymbol{s}''-\boldsymbol{s})\}\, n(\boldsymbol{s})\, w(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'')\, K_\omega(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{s}''). \tag{68}$$

Damit folgt Gl. (35) wie bisher; allerdings stellt ϑ jetzt den Winkel zwischen $\boldsymbol{v}'$ und $\boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ dar. Führen mehrere Bahnen von $\boldsymbol{r}'$ nach $\boldsymbol{r}$, so sind nur elementare Abänderungen erforderlich. In jedem Fall ergibt sich die BOLTZMANN-Gleichung (29).

In Gegenwart eines Magnetfeldes mit dem Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ sind GREENsche Funktion (im sauberen Leiter) bzw. gemittelte GREENsche Funktion (im Leiter mit Zusätzen) sowie die zugehörigen Verteilungsfunktionen wie in den Gln. (37), (48), (44) und (50) mit dem entsprechenden Exponentialfaktor zu multiplizieren, nur erfolgt die Integration nicht entlang der geradlinigen Verbindung der Punkte $\boldsymbol{r}'$ und $\boldsymbol{r}$, sondern entlang der klassischen Bahn. Auch Gl. (39) bleibt gültig, aber $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ wird jetzt implizit definiert durch

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\delta\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{H}(t)\cdot(\delta\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})\times \mathrm{d}\boldsymbol{t}). \tag{69}$$

Außer der Bahn von $\boldsymbol{r}'$ nach $\boldsymbol{r}$ wird hierfür eine benachbarte Bahn von $\boldsymbol{r}'$ nach $\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}$ betrachtet; der Vektor vom Bahnpunkt $\boldsymbol{t}$ zu einem benachbarten Punkt der Nachbarbahn sei $\delta\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})$ (also insbesondere $\delta\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}')=0$ und $\delta\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r})=\delta\boldsymbol{r}$). Aus der impliziten Definition Gl. (69) folgt

$$\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \tag{70}$$

[vgl. Gl. (41)], denn wählt man $\delta\boldsymbol{r} \| \boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, so ist die „benachbarte Bahn" mit der ursprünglichen (abgesehen vom letzten Stück) identisch und man hat $\delta\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})\times \mathrm{d}\boldsymbol{t}\equiv 0$. Mittels Gl. (70) bestätigt man jetzt sofort die Gln. (47) und (51). Gl. (52) bleibt mutatis mutandis [vgl. Gl. (67)] gültig; aus ihr folgt wie bisher Gl. (55).

Anhang: Quasiklassische Näherung für Greensche Funktionen

Es soll die Gleichung

$$\left(i\,\omega + \frac{1}{2\,m}(\partial + i\,e\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))^2 - V(\boldsymbol{r}) + \mu\right) G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{A. 1}$$

für $G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ in quasiklassischer Näherung gelöst werden. Hierbei spielt die Funktion

$$S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t} \tag{A. 2}$$

eine wesentliche Rolle. Das Integral in Gl. (A. 2) ist entlang der klassischen Bahn der Energie μ zu erstrecken. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})$ bedeutet den kanonischen Impuls

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}) = m\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) - e\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}); \tag{A. 3}$$

insbesondere für $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\equiv 0$ (kein Magnetfeld) ist also $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})$ gleich dem gewöhnlichen Impuls. Als Folge der Bewegungsgleichungen gilt

$$\begin{aligned} \partial S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')/\partial\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{p}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \equiv m\,\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - e\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}),\\ \partial S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')/\partial\boldsymbol{r}' &= -\boldsymbol{p}_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \equiv -m\,\boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + e\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}'). \end{aligned} \tag{A. 4}$$

$\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ und $\boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ wurden in Zusammenhang mit Gl. (67) erklärt. Setzt man die Lösung von Gl. (A. 1) an in der Form

$$G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = f_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\exp\{i\,S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\}, \tag{A. 5}$$

so folgt wegen der Gln. (A. 4) und (57) für $f_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2\,m}\Delta f_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + i\left[\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\partial f_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial\boldsymbol{r}} + \frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial\boldsymbol{r}} f_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \omega\, f_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right] = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{A. 6}$$

Die quasiklassische Näherung besteht praktisch darin, für $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$ den Term $\Delta f_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ fortzulassen, bei $\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{r}'$ dagegen nur ihn zu berücksichtigen.

Die Differentialgleichung (A. 6) für $f_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ enthält das Vektorpotential und das Magnetfeld nicht direkt, sondern nur indirekt über die Gestalt der Bahn, d. h. die Funktion $\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$. Insgesamt macht sich in $G_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ das Magnetfeld außer durch die Krümmung der Bahnen nur durch den Phasenfaktor

$$\exp\{-i e \int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t}\}$$

mit Integration entlang der Bahn bemerkbar. Dieser Faktor wurde in Abschn. 3 und in dem letzten Absatz von Abschn. 4 benutzt. In $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ tritt der einfache Faktor

$$\exp\{-2 i e \int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t}\}$$

nur dann auf, wenn die Bahnkrümmung durch das Magnetfeld vernachlässigt werden darf, d. h. wenn in beiden Richtungen praktisch die gleiche Bahn durchlaufen wird.

Von nun an sei das Magnetfeld fortgelassen und $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$ gesetzt. Wir untersuchen zunächst

$$\partial \boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')/\partial \boldsymbol{r} \equiv \operatorname{div} \boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'). \qquad (\text{A. }7)$$

Hierzu denken wir uns die Bahn von $\boldsymbol{r}'$ nach $\boldsymbol{r}$ eingebettet in ein infinitesimales Bündel von Bahnen, die sämtlich von $\boldsymbol{r}'$ ausgehen. Integriert man $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ über ein Volumen, das aus diesem Bündel durch zwei benachbarte zur Bahn senkrechte Ebenen ausgeschnitten wird und wendet den GAUSSschen Satz an, so folgt

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = v(s)\, \mathrm{d} \ln(v(s)\, q(s))/\mathrm{d}s. \qquad (\text{A. }8)$$

Dabei ist $\mathrm{d}s$ das Bogenelement der Bahn; $v(s)$ und $q(s)$ sind FERMI-Geschwindigkeit und Bündelquerschnitt an der jeweiligen Stelle.

Läßt man in Gl. (A. 6) den ersten Summanden fort und beachtet Gl. (A. 8), so folgt

$$\mathrm{d} \ln(f_\omega(s) \sqrt{v(s)\, q(s)})/\mathrm{d}s = -\omega/v(s) \quad (\text{A. }9)$$

mit der Lösung

$$f_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{\text{const}}{\sqrt{v(\boldsymbol{r})\, q(\boldsymbol{r})}} \exp\left\{-\int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}} \frac{\omega}{v(s)}\, \mathrm{d}s\right\}. \quad (\text{A. }10)$$

Die Konstante ist so zu bestimmen, daß für $\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{r}'$ gilt

$$\Delta f_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 2\, m\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \qquad (\text{A. }11)$$

Damit findet man schließlich

$$f_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{m}{2\pi} \sqrt{\frac{v(\boldsymbol{r}')}{v(\boldsymbol{r})\, h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}} \cdot \exp\left\{-\int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}} \frac{\omega}{v(s)}\, \mathrm{d}s\right\} \qquad (\text{A. }12)$$

mit der Funktion $h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$, die in Gl. (58) erklärt wurde. Es wurde dabei benutzt, daß im Grenzfall $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}'$ gilt

$$h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2. \qquad (\text{A. }13)$$

Im homogenen Leiter ist das richtig für beliebige $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$; außerdem ist dort $v(\boldsymbol{r}') = v(\boldsymbol{r}) = v$. Die quasiklassische Näherung ist daher im homogenen Leiter für $|\omega| \ll \mu$ mit der strengen Lösung identisch. Obwohl wir diesen Punkt nicht untersucht haben, vermuten wir, daß die quasiklassische Näherung gut ist, solange sich die Elektronengeschwindigkeit (als Vektor) auf der FERMI-Wellenlänge relativ nur sehr wenig ändert.

Gl. (A. 12) hat bei sehr langen Bahnen nur für $\omega > 0$ ein vernünftiges Verhalten. Für $\omega < 0$ ist statt Gl. (A. 5) zu setzen

$$G_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = f_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \exp\{-i S(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\}. \qquad (\text{A. }14)$$

Im Falle eines Magnetfeldes erhält man den gleichen Exponentialfaktor

$$\exp\{-i e \int_{\boldsymbol{r}'}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t}\}$$

wie bisher; allerdings ist jetzt eigentlich entlang der in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Bahn zu integrieren. Wenn keine magnetische Bahnkrümmung berücksichtigt werden muß, bleibt Gl. (A. 12) für alle ω richtig, falls dort ω durch $|\omega|$ ersetzt wird.

Bei Invarianz gegen Zeitumkehr (also ohne Magnetfeld bzw. wenn die Wirkung des Magnetfeldes auf die Bahn vernachlässigt werden darf) gilt

$$\frac{v(\boldsymbol{r}')}{v(\boldsymbol{r})\, h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')} = \frac{v(\boldsymbol{r})}{v(\boldsymbol{r}')\, h(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})}. \qquad (\text{A. }15)$$

Wegen Gl. (A.12) findet man also auch in quasiklassischer Näherung

$$G_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = G_\omega(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}). \qquad (\text{A. }16)$$

In Gl. (56) wurde eigentlich $G_\omega(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$ angegeben, was sich für die Rechnungen des Abschn. 4 als bequemer erweist. Soll in $G_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ die magnetische Bahnkrümmung berücksichtigt werden, so sind in Gl. (56) unter der Wurzel die Orte $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$ zu vertauschen.

Zum Beweis von Gl. (A. 15) gehen wir aus von

$$\frac{\partial v_{aj}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial x_k} = -\frac{1}{2\,m}\,\frac{\partial S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial x_k\,\partial x_j'} = -\frac{\partial v_{ek}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial x_j'} = \frac{\partial v_{ak}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial x_j'}, \qquad (A.17)$$

wobei die ersten beiden Gleichheitszeichen eine Folge von Gl. (A. 4) sind, und das letzte aus der Invarianz gegen Zeitumkehr folgt. Wir führen die Abkürzung

$$a_{jk} = -\frac{1}{2\,m}\,\frac{\partial S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial x_j'\,\partial x_k} \qquad (A.18)$$

ein. Hiermit gilt

$$\mathrm{d}v_{aj}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}\,\mathrm{d}x_k \qquad (A.19)$$

und

$$\mathrm{d}v_{ak}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{d}x_j'\,a_{jk}. \qquad (A.20)$$

Man beachte, daß sich Gl. (A. 19) auf ein Bündel von Bahnen bezieht, die sämtlich durch den Punkt $\boldsymbol{r}'$ laufen, während Gl. (A. 20) für ein Bündel von Bahnen durch $\boldsymbol{r}$ gilt. Für a_{jk} findet man

$$\sum_{j=1}^{3} v_{aj}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,a_{jk} = 0 = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}\,v_{ak}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}). \qquad (A.21)$$

Das erste Gleichheitszeichen folgt mittels Gl. (A. 19) daraus, daß $|\boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')| = v(\boldsymbol{r})$ fest gegeben ist. Das zweite ergibt sich, wenn man $\mathrm{d}\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$ wählt, denn dann darf sich $\boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ nicht ändern. Ebensogut hätte man von Gl. (A. 20) ausgehen können.

Wir führen jetzt am Ort $\boldsymbol{r}$ (d. h. bezüglich des Index k) und am Ort $\boldsymbol{r}'$ (d. h. bezüglich des Index j) verschiedene Koordinatensysteme ein, deren z-Achse jeweils die Tangentenrichtung an die Bahn ist. Wegen Gl. (A. 21) wird a_{jk} dann zu einer zweireihigen Matrix b_{jk}. Es gilt gemäß Gl. (A. 19) bei dieser Wahl der Koordinatensysteme

$$\mathrm{d}v_{aj}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{k=1}^{2} b_{jk}\,\mathrm{d}x_k \qquad (A.22)$$

und deshalb $v^2(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\Omega' = |\det(b_{jk})|\,\mathrm{d}q(\boldsymbol{r})$, (A. 23)

wobei $\mathrm{d}\Omega'$ der Öffnungswinkel eines infinitesimalen Bündels von Bahnen durch $\boldsymbol{r}'$ und $\mathrm{d}q(\boldsymbol{r})$ dessen Querschnitt am Ort $\boldsymbol{r}$ ist. Beachtet man die der Gl. (A. 23) entsprechende Folgerung aus Gl. (A. 20) und die Definition Gl. (58) der Funktion $h(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, so folgt Gl. (A. 15). Beim Beweis von Gl. (60) tritt $\det(b_{jk})$ als Funktional-Determinante auf.

Schließlich soll $\overline{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ bei Anwesenheit von Fremdatomen in quasiklassischer Näherung berechnet werden. Wir gehen aus von der Integralgleichung

$$\overline{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{s}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{s}'\,G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})\,\left[n(\boldsymbol{s})\,w(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}')\,\overline{G}_\omega(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}') - \delta\mu(\boldsymbol{s})\,\delta(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}')\right]\overline{G}_\omega(\boldsymbol{s}',\boldsymbol{r}')\,; \qquad (A.24)$$

vgl. EAG. $G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ ist die GREENsche Funktion des sauberen Leiters; in quasiklassischer Näherung wird sie durch Gl. (56) gegeben. $n(\boldsymbol{s})$ bedeutet die – jetzt möglicherweise schwach ortsabhängige – Zahl der Fremdatome pro Volumen, während $w(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}')$ in Gl. (19) erklärt wurde. $\delta\mu(\boldsymbol{s})$ stellt eine Renormierung des chemischen Potentials dar. Wenn sich $\delta\mu(\boldsymbol{s})$ (schwach) ortsabhängig ergibt, handelt es sich eigentlich um die Renormierung des elektrochemischen Potentials; die Elektronendichte wird sich dann in solcher Weise ändern, daß auch ein räumlich veränderliches elektrisches Potential auftritt.

Zur Lösung von Gl. (A. 24) werden jetzt zwei Annahmen gemacht, die hinterher am Resultat zu prüfen sind. Für kleine Abstände (bis etwa zur Reichweite a der Wechselwirkung zwischen Elektron und Fremdatom) setzt man an

$$\overline{G}_\omega(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}') = -(2\,\pi)^{-3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\exp\{i\,\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}')\}\,\{P/\eta(\boldsymbol{k},\boldsymbol{s}) + i\,\pi\,\delta[\eta(\boldsymbol{k},\boldsymbol{s})]\,\operatorname{sign}\omega\} \qquad (A.25)$$

mit

$$\eta(\boldsymbol{k},\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{k}^2/(2\,m) + V(\boldsymbol{s}) - \mu \qquad (A.26)$$

und P als Hauptwert-Operator.

Für $\overline{G}_\omega(\boldsymbol{s}',\boldsymbol{r}')$ wird dagegen gesetzt

$$\overline{G}_\omega(\boldsymbol{s}',\boldsymbol{r}') = \exp\{i\,m\,\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}')\cdot(\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s})\}\,\overline{G}_\omega(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}')\,; \qquad (A.27)$$

vgl. Gl. (67). Ist $|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}'|$ allzu klein, so ist dieser Ansatz sicher nicht richtig; aber man darf hier wohl dieselben Überlegungen anstellen wie am Schluß von Abschn. 2. Man setzt jetzt die Gln. (A. 25), (A. 27) und (19) in Gl. (A. 24) ein und führt zunächst die Integration über $\boldsymbol{s}'$ aus. Das Hauptwert-Integral kompensiert man mittels der Festsetzung

$$\delta\mu(\boldsymbol{s}) = -\frac{n(\boldsymbol{s})}{(2\pi)^3} P \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\, \frac{|v(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k})|^2}{\eta(\boldsymbol{k},\boldsymbol{s})}. \tag{A.28}$$

Hier bedeutet $\boldsymbol{l}$ [ursprünglich $m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}')$] einen Impuls auf der (lokalen) FERMI-Kugel. Es bleibt mit der Definition Gl. (18) des Streuquerschnitts

$$\overline{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \frac{i}{2}\,\mathrm{sign}\,\omega \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{s}\, G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})\, n(\boldsymbol{s})\, v(\boldsymbol{s})\, \sigma(\boldsymbol{s})\, \overline{G}_\omega(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}'). \tag{A.29}$$

Wendet man hierauf den Operator $[i\,\omega + \Delta/(2\,m) - V(\boldsymbol{r}) + \mu]$ an und beachtet Gl. (A. 1) mit $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$, so folgt

$$\left[i\left(\omega + \frac{n(\boldsymbol{r})\,v(\boldsymbol{r})\,\sigma(\boldsymbol{r})}{2}\,\mathrm{sign}\,\omega\right) + \frac{1}{2\,m}\,\Delta - V(\boldsymbol{r}) + \mu\right]\overline{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{A.30}$$

Berechnet man hieraus $\overline{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ in quasiklassischer Näherung, so ist nur in Gl. (56) die Ersetzung $|\omega| \rightarrow |\omega| + n(s)v(s)\sigma(s)/2$ vorzunehmen; damit folgt sofort Gl. (63). Die beiden Annahmen Gln. (A. 25) und (A. 27) lassen sich nun leicht rechtfertigen: Gl. (A. 27) ist eine unmittelbare Folge von Gl. (63), während sich Gl. (A. 25) in bekannter Weise daraus ergibt, daß Gl. (63) für kleine Abstände $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ in die GREENsche Funktion für den homogenen Leiter übergeht.

In Gegenwart eines Magnetfeldes gilt Gl. (48) mit $\overline{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ gemäß Gl. (63); falls die magnetische Bahnkrümmung eine Rolle spielt, sind dabei in Gl. (63) unter der Wurzel $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$ zu vertauschen. Zum Beweis von Gl. (48) geht man aus von Gl. (37) mit $G_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ nach Gl. (56) und ersetzt in Gl. (A. 25) im Exponenten $\boldsymbol{k}$ durch $(\boldsymbol{k} - e\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}))$ und in Gl. (A. 27) $m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}')$ durch $(m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}') - e\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}))$.

Zum Skin-Effekt zeitlich periodischer elektromagnetischer Felder unter Berücksichtigung der magnetischen Widerstandsänderung

JOACHIM SEEBASS

Institut für Elektrophysik der Technischen Hochschule Braunschweig

(Z. Naturforschg. 21 a, 1436—1443 [1966]; eingegangen am 23. April 1966)

Magnetoresistance leads to a change of the normal skin-effect. The electromagnetic field, periodic in time, is calculated by a successive approximation method for a half-space, the electric conductivity of which is dependent quadratically on the magnetic field. As expected results show the existence of uneven harmonics. Compared with the case without magnetoresistance, the a-c-resistance of some part of the half-space is altered by additional terms, which are dependent on the intensity of the current. Analogous results are given for a planar conducting layer of constant thickness.

Bei der Behandlung quasistationärer elektromagnetischer Vorgänge, wie z. B. Wirbelstrom und Skin-Effekt, sieht man die elektrische Leitfähigkeit im allgemeinen als feldstärkeunabhängige Materialgröße an. Tatsächlich weisen aber praktisch alle Materialien — mehr oder weniger ausgeprägt — eine Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von der im Material herrschenden magnetischen Feldstärke auf. Dabei spielt es keine Rolle, ob diese magnetische Feldstärke durch ein äußeres Magnetfeld oder durch in dem Material fließende Ströme verursacht wird; die magnetische Widerstandsänderung wird also die Erscheinungen des Skin-Effektes gegenüber dem Fall konstanter elektrischer Leitfähigkeit modifizieren. Für eine exakte theoretische Behandlung dieses Problems müßte man das gekoppelte System aus MAXWELLschen Gleichungen und BOLTZMANN-Gleichung

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu\,\dot{\boldsymbol{H}}, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}_r f - \frac{e}{m}(\boldsymbol{E} + \mu\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{grad}_v f = -\frac{f-f_0}{\tau} \tag{3}$$